CLASE 8. El Teorema de la Divergencia de Gauss

La generalización del teorema de la divergencia en el plano (Teorema 5.8) al espacio $\mathbb{R}^3$ se obtiene al considerar el flujo de un campo vectorial a través (hacia afuera, orientación exterior) de una superficie cerrada, la cual encierra a una región (volumen). En condiciones adecuadas el flujo del campo coincidirá con la integral triple de la divergencia.

Teorema 8.1 (Teorema de la Divergencia de Gauss)**.** *Sea V una región elemental en el espacio de tipo IV (simétrica) y denotemos por ∂V la superficie cerrada, orientada exteriormente, que acota a V. Si* $\mathbf{F}$ *es un campo vectorial de clase C^1 definido en V, entonces*

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{V} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}V.$$

Como caso particular de éste teorema, tenemos:

Teorema 8.2 (Ley de Gauss)**.** *Sea V una región elemental en el espacio de tipo IV (simétrica) y denotemos por ∂V la superficie cerrada, orientada con $\boldsymbol{\eta}$ que apunta hacia afuera, que acota a V. Consideremos el campo vectorial $\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ (y, por tanto, $\|\mathbf{r}(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$). Si el origen no está en ∂V, entonces*

$$\iint_{\partial V} \frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\eta}}{\|\mathbf{r}\|^3}\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 4\pi & \text{si } (0,0,0) \in V; \\ 0 & \text{si } (0,0,0) \notin V. \end{cases}$$

Opcional

Para interpretar la divergencia como tasa de expansión de flujo, recurrimos al siguiente teorema:

Teorema 8.3. *Sea $B(\mathbf{p},t)$ la región esférica de radio t con centro en el punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. La esfera (superficie) de radio t y centro $\mathbf{p}$, denotada por $S(\mathbf{p},t)$, es la frontera de $B(\mathbf{p},t)$ con vector normal unitario $\boldsymbol{\eta}$ exterior. Si $V(t)$ denota el volumen de $B(\mathbf{p},t)$ y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de tipo C^1 (en la esfera), entonces*

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(\mathbf{p}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{V(t)} \iint_{S(\mathbf{p},t)} \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}s.$$

Es decir, la divergencia de $\mathbf{F}$ en el punto $\mathbf{p}$ es la razón de cambio del flujo (de $\mathbf{F}$) saliendo de la esfera por unidad de volumen, por unidad de tiempo en el punto. Si se interpreta a $\mathbf{F}$

como una densidad de masa, entonces la divergencia de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{p}$ sería la razón de cambio de la masa por unidad de volumen en la unidad de tiempo en el punto $\mathbf{p}$.

Prueba. La función escalar $f(x,y,z) = \mathrm{div}(\mathbf{F})$ es continua por ser $\mathbf{F}$ de clase $\mathcal{C}^1$, y para cada $\mathbf{x} = (x,y,z) \in B(\mathbf{p},t)$ podemos escribir $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + h(\mathbf{x})$, con $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} h(\mathbf{x}) = 0$. Al aplicar el teorema de la divergencia (Teorema 8.1) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{V(t)}\iint\limits_{S(\mathbf{p},t)} \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} \mathrm{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}V\\ &= \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} f(\mathbf{p})\,\mathrm{d}V + \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Como $f(\mathbf{p}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{F})(\mathbf{p})$ es constante (respecto a $\mathbf{x}$) entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{V(t)}\iint\limits_{S(\mathbf{p},t)} \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}s &= f(\mathbf{p})\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} \mathrm{d}V + \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V\\ &= f(\mathbf{p}) + \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V. \qquad (1)\end{aligned}$$

Ahora procedemos a probar que $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V = 0$. Como $h(\mathbf{x}) \to 0$ cuando $\mathbf{x}\to\mathbf{p}$ entonces se cumple $\max\limits_{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\le t} \|h(\mathbf{x})\| \to 0$ si $t\to 0$. Luego,

$$\left|\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V\right| \le \max_{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\le t} |h(\mathbf{x})| \frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} \mathrm{d}V \le \max_{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\le t} \|h(\mathbf{x})\|.$$

Tomando límite es

$$0 \le \lim_{t\to 0}\left|\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V\right| \le \lim_{t\to 0}\max_{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\le t} |h(\mathbf{x})| = 0.$$

Así, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{V(t)}\iiint\limits_{B(\mathbf{p},t)} h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V = 0$ y, gracias a la ecuación (1), concluimos que

$$f(\mathbf{p}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{V(t)}\iint\limits_{S(\mathbf{p},t)} \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}s.$$

□

■

Ejemplo 8.4. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}$ dado por
$\mathbf{F}(x,y,z) = (zx\sqrt{z^2-y^2}\,,\ 2yz\,,\ y\sqrt{x^2+y^2}-z^2)$ y las superficies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2 \leq 9,\ z=3\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2 = z^2,\ 1 \leq z \leq 3\}$$
$$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2 \leq 1,\ z=1\}.$$

Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ con la orientación de los vectores normales exteriores. Calcule $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

Solución. Se cumplen las condiciones del Teorema de la Divergencia (Teorema 8.1). Calculos directos arrojan que $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = z\sqrt{z^2-y^2}$.

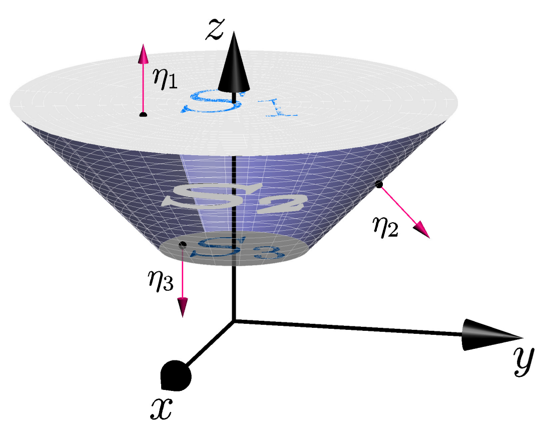

Figura 1: La superficie cerrada $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, orientada exteriormente.

Así $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV$. Ahora,

$$\begin{aligned}\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV &= \int_1^3\int_{-z}^{z}\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} z\sqrt{z^2-y^2}\, dx\, dy\, dz\\ &= 2\int_1^3\int_{-z}^{z} z(z^2-y^2)\, dy\, dz = \frac{8}{3}\int_1^3 z^4\, dz\\ &= \frac{8}{3}\frac{z^5}{5}\Bigg|_1^3 = \frac{8}{15}\left(3^5-1\right)\left(=\frac{1936}{15}\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 8.5. Consideremos el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2y$. Este cilindro corta al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, determinando (en el cono) una superficie acotada S_1. La superficie "lateral" del cilindro, comprendida entre el cono y el plano z=0, se denota por S_2 y sea $S = S_1 \cup S_2$ con la orientación "exterior"[1]. Si $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, x, z + 1)$, calcule $\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \text{Flujo}(S)$.

Solución. Como S no es una superficie cerrada, no podemos aplicar directamente el Teorema de la Divergencia de Gauss. Sin embargo, si definimos S_3 como la tapa inferior dada por $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 2y$ entonces la superficie $S \cup S_3$ sí acota (encierra) una región (un sólido) V. Orientamos a $S \cup S_3$ exteriormente. El campo $\mathbf{F}$ es suave y aplicando el teorema de la divergencia es

$$\iiint\limits_V \text{div}(\mathbf{F})\, dV = \iint\limits_{S \cup S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint\limits_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

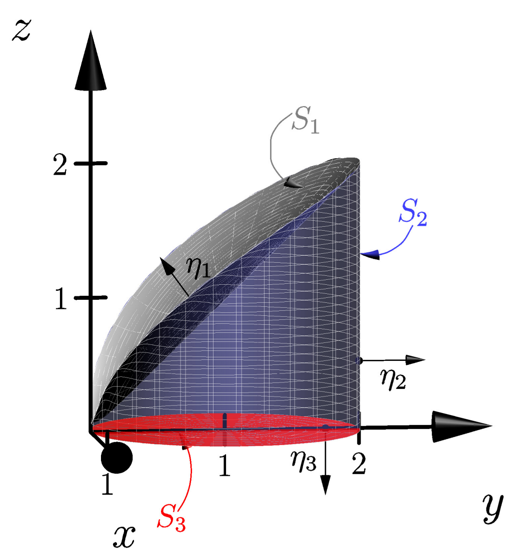

Figura 2: Cerrando la superficie para poder aplicar el Teorema de la Divergencia.

De aquí es $\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_V \text{div}(\mathbf{F})\, dV - \iint\limits_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Calcularemos ahora, por separado, la integral de volumen de la divergencia y el flujo en S_3 (la tapa inferior). Sobre S_3 será $z = 0 =$

[1] Formalmente, el término "orientación exterior" no tiene sentido aquí puesto que la superficie no es cerrada. Sin embargo, en este ejemplo particular, *todo el mundo* entiende igual lo que se quiere decir con dicha frase. En cualquier caso, puede corroborar si entendió bien examinando la Figura 2.

$f(x,y)$, con Dom $f = \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$. La parametrización usual es $\phi(x,y) = (x,y,f(x,y)) = (x,y,0)$ (con dominio $\mathcal{D}$), $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = (-f_x\,,\ -f_y\,,\ 1) = (0,0,1)$. La orientación exterior $\boldsymbol{\eta}_3$ está dada $\boldsymbol{\eta}_3 = (0,0,-1)$. Luego ϕ invierte la orientación y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\text{Flujo}(S_3) &= \iint\limits_{S_3} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\iint\limits_{\mathcal{D}} (2x,x,1)\cdot(0,0,1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\iint\limits_{\mathcal{D}} \mathrm{dA} = -\,\text{Area}(\mathcal{D}) = -\pi.
\end{aligned}$$

En cuanto a la integral triple, tenemos

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}V = 3\iint\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Usando coordenadas polares $x = r\cos(t)$, $y = r\,\text{sen}(t)$, y sustituyendo en $x^2+y^2 = 2y$ es $r^2 = 2r\,\text{sen}(t)$, de donde $r = 0$ o $r = 2\,\text{sen}(t)$. Además, $0 \leq t \leq \pi$, con lo cual

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{V} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}V &= 3\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 3\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\text{sen}(t)} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\cdot 3\int_0^{\pi} \text{sen}^3(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 8\int_0^{\pi} \text{sen}^2(t)\,\text{sen}(t)\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{\pi}(1-\cos^2(t))\,\text{sen}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}V - \iint\limits_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{32}{3} - (-\pi) = \frac{32}{3} + \pi.$$